Prof. Dr. Alfred Toth

Zu einer qualitativen semiotischen Gruppentheorie

1. Wie in Toth (2009) gezeigt wurde, kann man die Semiotik der Peircezahlen nicht nur als Gruppentheorie einführen, sondern kann man zeigen, daß es genau drei semiotische Gruppen gibt.

1.1. Die Gruppe (PZ, $\circ_1$)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_1 1 = 2$; $1 \circ_1 2 = 2 \circ_1 1 = 3$; $1 \circ_1 3 = 3 \circ_1 1 = 1$; $2 \circ_1 2 = 1$; $2 \circ_1 3 = 3 \circ_1 2 = 2$; $3 \circ_1 3 = 3$.

2. Assoziativität: $1 \circ_1 (2 \circ_1 3) = (1 \circ_1 2) \circ_1 3 = 2$; $2 \circ_1 (3 \circ_1 2) = (2 \circ_1 3) \circ_1 2 = 1$, $3 \circ_1 (3 \circ_1 1) = (3 \circ_1 3) \circ_1 1 = 1$, usw.

3. Einselement: $1 \circ_1 3 = 3 \circ_1 1 = 1$; $2 \circ_1 3 = 3 \circ_1 2 = 2$; $3 \circ_1 3 = 3$, d.h. $e = 3$.

4. Inverses Element: $1^{-1} = 2$, denn $1 \circ_1 2 = 3$; $2^{-1} = 1$, denn $2 \circ_1 1 = 3$; $3^{-1} = 3$ = const.

Sei σ_1: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$, dann erzeugt σ_1 die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

σ_1 (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (3.2 1.2 2.2)

σ_1 (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (3.2 1.2 2.1)

σ_1 (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (3.2 1.2 2.3)

σ_1 (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (3.2 1.1 2.1)

σ_1 (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (3.2 1.1 2.3)

σ_1 (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.2 1.3 2.3)

σ_1 (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (3.1 1.1 2.1)

σ_1 (3.2 2.2 1.3) $\rightarrow$ (3.1 1.1 2.3)

σ_1 (3.2 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.1 1.3 2.3)

σ_1 (3.3 2.3 1.3) $\rightarrow$ (3.3 1.3 2.3)

1.2. Die Gruppe (PZ, $\circ_2$)

(PZ, $\circ_2$) wurde bereits von Bogarín (1992) als Gruppe nachgewiesen, nachdem Bense kurz darauf hingewiesen hatte, dass “die kleine semiotische Matrix […] der Cayleyschen Gruppentafel entspricht” (1986, S. 43).

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_2 1 = 3$; $1 \circ_2 2 = 2 \circ_2 1 = 1$; $1 \circ_2 3 = 3 \circ_2 1 = 2$; $2 \circ_2 2 = 2$; $2 \circ_2 3 = 3 \circ_2 2 = 3$; $3 \circ_2 3 = 1$.

2. Assoziativität: $1 \circ_2 (2 \circ_2 3) = (1 \circ_2 2) \circ_2 3 = 2$; $2 \circ_2 (3 \circ_2 2) = (2 \circ_2 3) \circ_2 2 = 3$, $3 \circ_2 (3 \circ_2 1) = (3 \circ_2 3) \circ_2 1 = 3$, usw.

3. Einselement: $1 \circ_2 2 = 2 \circ_2 1 = 1$; $2 \circ_2 2 = 2$; $3 \circ_2 2 = 2 \circ_2 3 = 3$, d.h. e = 2.

4. Inverses Element: $1^{-1} = 3$, denn $1 \circ_2 3 = 2$; $2^{-1} = 2$ = const., $3^{-1} = 1$, denn $3 \circ_2 1 = 2$.

Sei σ_2: $1 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$, dann erzeugt σ_2 die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

σ_2 (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (1.3 2.3 3.3)

σ_2 (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (1.3 2.3 3.2)

σ_2 (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (1.3 2.3 3.1)

σ_2 (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (1.3 2.2 3.2)

σ_2 (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (1.3 2.2 3.1)

σ_2 (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (1.3 2.1 3.1)

σ_2 (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (1.2 2.2 3.2)

σ_2 (3.2 2.2 1.3) $\rightarrow$ (1.2 2.2 3.1)

σ_2 (3.2 2.3 1.3) $\rightarrow$ (1.2 2.1 3.1)

σ_2 (3.3 2.3 1.3) $\rightarrow$ (1.1 2.1 3.1)

1.3. Die Gruppe (PZ, $\circ_3$)

1. Abgeschlossenheit: $1 \circ_3 1 = 1$; $1 \circ_3 2 = 2 \circ_3 1 = 2$; $1 \circ_3 3 = 3 \circ_3 1 = 3$; $2 \circ_3 2 = 3$; $2 \circ_3 3 = 3 \circ_3 2 = 1$; $3 \circ_3 3 = 2$.

2. Assoziativität: $1 \circ_3 (2 \circ_3 3) = (1 \circ_3 2) \circ_3 3 = 1$; $2 \circ_3 (3 \circ_3 2) = (2 \circ_3 3) \circ_3 2 = 2$, $3 \circ_3 (3 \circ_3 1) = (3 \circ_3 3) \circ_3 1 = 2$, usw.

3. Einselement: $1 \circ_3 1 = 1$; $2 \circ_3 1 = 1 \circ_3 2 = 2$; $3 \circ_3 1 = 1 \circ_3 3 = 3$, d.h. e = 1.

4. Inverses Element: $1^{-1} = 1$ = const., $2^{-1} = 3$, denn $2 \circ_3 3 = 1$, $3^{-1} = 2$, denn $3 \circ_3 2 = 1$.

Sei σ_3: $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 2$, dann erzeugt σ_3 die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

σ_3 (3.1 2.1 1.1) $\rightarrow$ (2.1 3.1 1.1)

σ_3 (3.1 2.1 1.2) $\rightarrow$ (2.1 3.1 1.3)

σ_3 (3.1 2.1 1.3) $\rightarrow$ (2.1 3.1 1.2)

σ_3 (3.1 2.2 1.2) $\rightarrow$ (2.1 3.3 1.3)

σ_3 (3.1 2.2 1.3) $\rightarrow$ (2.1 3.3 1.2)

σ_3 (3.1 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.1 3.2 1.2)

σ_3 (3.2 2.2 1.2) $\rightarrow$ (2.3 3.3 1.3)

σ_3 (3.2 2.2 1.3) $\rightarrow$ (2.3 3.3 1.2)

σ_3 (3.2 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.3 3.2 1.2)

σ_3 (3.3 2.3 1.3) $\rightarrow$ (2.2 3.2 1.2)

Alle drei Gruppen sind offensichtlich kommutativ, d.h. abelsch.

2. Heiße

R = (3.x, 2.y, 1.z) mit x, y, z ∈ (1, 2, 3)

eine semiotische Relation und sei k_n mit n ∈ (1, ..., 27) die Abbildung der Kontexturierung (vgl. Kaehr 2009), dann man die $3^3 = 27$ über R erzeugbaren monokontexturalen semiotischen Relationen auf polykontexturale abbilden.

k_1: (3.1, 2.1, 1.1) $\rightarrow$ $(3.1_3, 2.1_1, \underline{1.1}_{1.3})$

k_2: (3.1, 2.1, 1.2) $\rightarrow$ $(3.1_3, 2.1_1, 1.2_1)$

k_3: (3.1, 2.1, 1.3) $\rightarrow$ $(3.1_3, 2.1_1, 1.3_3)$

k_4: (3.1, 2.2, 1.1) $\rightarrow$ $(3.1_3, 2.2_{1.2}, 1.1_{1.3})$

k_5: (3.1, 2.2, 1.2) $\rightarrow$ $(3.1_3, \underline{2.2}_{1.2}, 1.2_1)$

k_6: (3.1, 2.2, 1.3) $\rightarrow$ $(3.1_3, \underline{2.2}_{1.2}, 1.3_3)$

k_7: (3.1, 2.3, 1.1) $\rightarrow$ $(3.1_3, 2.3_2, 1.1_{1.3})$

k_8: (3.1, 2.3, 1.2) $\rightarrow$ $(3.1_3, 2.3_2, 1.2_1)$

k_9: (3.1, 2.3, 1.3) $\rightarrow$ $(3.1_3, \underline{2.3}_2, 1.3_3)$

k_{10}: (3.2, 2.1, 1.1) $\rightarrow$ $(3.2_2, 2.1_1, \underline{1.1}_{1.3})$

k_{11}: (3.2, 2.1, 1.2) → $(3.2_2, 2.1_1, 1.2_1)$

k_{12}: (3.2, 2.1, 1.3) → $(3.2_2, 2.1_1, 1.3_3)$

k_{13}: (3.2, 2.2, 1.1) → $(3.2_2, 2.2_{1.2}, 1.1_{1.3})$

k_{14}: (3.2, 2.2, 1.2) → $(3.2_2, \underline{2.2}_{1.2}, 1.2_1)$

k_{15}: (3.2, 2.2, 1.3) → $(3.2_2, \underline{2.2}_{1.2}, 1.3_3)$

k_{16}: (3.2, 2.3, 1.1) → $(3.2_2, 2.3_2, 1.1_{1.3})$

k_{17}: (3.2, 2.3, 1.2) → $(3.2_2, 2.3_2, 1.2_1)$

k_{18}: (3.2, 2.3, 1.3) → $(3.2_2, \underline{2.3}_2, 1.3_3)$

k_{19}: (3.3, 2.1, 1.1) → $(3.3_{2.3}, 2.1_1, \underline{1.1}_{1.3})$

k_{20}: (3.3, 2.1, 1.2) → $(3.3_{2.3}, 2.1_1, 1.2_1)$

k_{21}: (3.3, 2.1, 1.3) → $(3.3_{2.3}, 2.1_1, 1.3_3)$

k_{22}: (3.3, 2.2, 1.1) → $(3.3_{2.3}, 2.2_{1.2}, 1.1_{1.3})$

k_{23}: (3.3, 2.2, 1.2) → $(3.3_{2.3}, \underline{2.2}_{1.2}, 1.2_1)$

k_{24}: (3.3, 2.2, 1.3) → $(3.3_{2.3}, \underline{2.2}_{1.2}, 1.3_3)$

k_{25}: (3.3, 2.3, 1.1) → $(3.3_{2.3}, 2.3_2, 1.1_{1.3})$

k_{26}: (3.3, 2.3, 1.2) → $(3.3_{2.3}, 2.3_2, 1.2_1)$

k_{27}: (3.3, 2.3, 1.3) → $(3.3_{2.3}, \underline{2.3}_2, 1.3_3)$

3. Stellt man (k_1 ... k_{27}) mit Hilfe der Gruppentheorie dar, ergeben sich also 3 mal 27 = 81 semiotische kontexturierte σ_i-Systeme.

R	σ_1	σ_2	σ_3
$(3.1_3, 2.1_1, 1.1_{1.3})$	$(3.2_2, 1.2_1, 2.2_{1.2})$	$(1.3_3, 2.3_2, 3.3_{2.3})$	$(2.1_1, 3.1_3, 1.1_{1.3})$
$(3.1_3, 2.1_1, 1.2_1)$	$(3.2_2, 1.2_1, 2.1_1)$	$(1.3_3, 2.3_2, 3.2_2)$	$(2.1_1, 3.1_3, 1.3_3)$
$(3.1_3, 2.1_1, 1.3_3)$	$(3.2_2, 1.2_1, 2.3_2)$	$(1.3_3, 2.3_2, 3.1_3)$	$(2.1_1, 3.1_3, 1.2_1)$
$(3.1_3, 2.2_{1.2}, 1.1_{1.3})$	$(3.2_2, 1.1_{1.3}, 2.2_{1.2})$	$(1.3_3, 2.2_{1.2}, 3.3_{2.3})$	$(2.1_1, 3.3_{2.3}, 1.1_{1.3})$
$(3.1_3, 2.2_{1.2}, 1.2_1)$	$(3.2_2, 1.1_{1.3}, 2.1_1)$	$(1.3_3, 2.2_{1.2}, 3.2_2)$	$(2.1_1, 3.3_{2.3}, 1.3_3)$
$(3.1_3, 2.2_{1.2}, 1.3_3)$	$(3.2_2, 1.1_{1.3}, 2.3_2)$	$(1.3_3, 2.2_{1.2}, 3.1_3)$	$(2.1_1, 3.3_{2.3}, 1.2_1)$
$(3.1_3, 2.3_2, 1.1_{1.3})$	$(3.2_2, 1.3_3, 2.2_{1.2})$	$(1.3_3, 2.1_1, 3.3_{2.3})$	$(2.1_1, 3.2_2, 1.1_{1.3})$
$(3.1_3, 2.3_2, 1.2_1)$	$(3.2_2, 1.3_3, 2.1_1)$	$(1.3_3, 2.1_1, 3.2_2)$	$(2.1_1, 3.2_2, 1.3_3)$

$(3.1_3, 2.3_2, 1.3_3)$	$(3.2_2, 1.3_3, 2.3_2)$	$(1.3_3, 2.1_1, 3.1_3)$	$(2.1_1, 3.2_2, 1.2_1)$

$(3.2_2, 2.1_1, 1.1_{1.3})$	$(3.1_3, 1.2_1, 2.2_{1.2})$	$(1.2_1, 2.3_2, 3.3_{2.3})$	$(2.3_2, 3.1_3, 1.1_{1.3})$
$(3.2_2, 2.1_1, 1.2_1)$	$(3.1_3, 1.2_1, 2.1_1)$	$(1.2_1, 2.3_2, 3.2_2)$	$(2.3_2, 3.1_3, 1.3_3)$
$(3.2_2, 2.1_1, 1.3_3)$	$(3.1_3, 1.2_1, 2.3_2)$	$(1.2_1, 2.3_2, 3.1_3)$	$(2.3_2, 3.1_3, 1.2_1)$
$(3.2_2, 2.2_{1.2}, 1.1_{1.3})$	$(3.1_3, 1.1_{1.3}, 2.2_{1.2})$	$(1.2_1, 2.2_{1.2}, 3.3_{2.3})$	$(2.3_2, 3.3_{2.3}, 1.1_{1.3})$
$(3.2_2, 2.2_{1.2}, 1.2_1)$	$(3.1_3, 1.1_{1.3}, 2.1_1)$	$(1.2_1, 2.2_{1.2}, 3.2_2)$	$(2.3_2, 3.3_{2.3}, 1.3_3)$
$(3.2_2, 2.2_{1.2}, 1.3_3)$	$(3.1_3, 1.1_{1.3}, 2.3_2)$	$(1.2_1, 2.2_{1.2}, 3.1_3)$	$(2.3_2, 3.3_{2.3}, 1.2_1)$
$(3.2_2, 2.3_2, 1.1_{1.3})$	$(3.1_3, 1.3_3, 2.2_{1.2})$	$(1.2_1, 2.1_1, 3.3_{2.3})$	$(2.3_2, 3.2_2, 1.1_{1.3})$
$(3.2_2, 2.3_2, 1.2_1)$	$(3.1_3, 1.3_3, 2.1_1)$	$(1.2_1, 2.1_1, 3.2_2)$	$(2.3_2, 3.2_2, 1.3_3)$
$(3.2_2, 2.3_2, 1.3_3)$	$(3.1_3, 1.3_3, 2.3_2)$	$(1.2_1, 2.1_1, 3.1_3)$	$(2.3_2, 3.2_2, 1.2_1)$

$(3.3_{2.3}, 2.1_1, 1.1_{1.3})$	$(3.3_{2.3}, 1.2_1, 2.2_{1.2})$	$(1.1_{1.3}, 2.3_2, 3.3_{2.3})$	$(2.2_{1.2}, 3.1_3, 1.1_{1.3})$
$(3.3_{2.3}, 2.1_1, 1.2_1)$	$(3.3_{2.3}, 1.2_1, 2.1_1)$	$(1.1_{1.3}, 2.3_2, 3.2_2)$	$(2.2_{1.2}, 3.1_3, 1.3_3)$
$(3.3_{2.3}, 2.1_1, 1.3_3)$	$(3.3_{2.3}, 1.2_1, 2.3_2)$	$(1.1_{1.3}, 2.3_2, 3.1_3)$	$(2.2_{1.2}, 3.1_3, 1.2_1)$
$(3.3_{2.3}, 2.2_{1.2}, 1.1_{1.3})$	$(3.3_{2.3}, 1.1_{1.3}, 2.2_{1.2})$	$(1.1_{1.3}, 2.2_{1.2}, 3.3_{2.3})$	$(2.2_{1.2}, 3.3_{2.3}, 1.1_{1.3})$
$(3.3_{2.3}, 2.2_{1.2}, 1.2_1)$	$(3.3_{2.3}, 1.1_{1.3}, 2.1_1)$	$(1.1_{1.3}, 2.2_{1.2}, 3.2_2)$	$(2.2_{1.2}, 3.3_{2.3}, 1.3_3)$
$(3.3_{2.3}, 2.2_{1.2}, 1.3_3)$	$(3.3_{2.3}, 1.1_{1.3}, 2.3_2)$	$(1.1_{1.3}, 2.2_{1.2}, 3.1_3)$	$(2.2_{1.2}, 3.3_{2.3}, 1.2_1)$
$(3.3_{2.3}, 2.3_2, 1.1_{1.3})$	$(3.3_{2.3}, 1.3_3, 2.2_{1.2})$	$(1.1_{1.3}, 2.1_1, 3.3_{2.3})$	$(2.2_{1.2}, 3.2_2, 1.1_{1.3})$
$(3.3_{2.3}, 2.3_2, 1.2_1)$	$(3.3_{2.3}, 1.3_3, 2.1_1)$	$(1.1_{1.3}, 2.1_1, 3.2_2)$	$(2.2_{1.2}, 3.2_2, 1.3_3)$
$(3.3_{2.3}, 2.3_2, 1.3_3)$	$(3.3_{2.3}, 1.3_3, 2.3_2)$	$(1.1_{1.3}, 2.1_1, 3.1_3)$	$(2.2_{1.2}, 3.2_2, 1.2_1)$

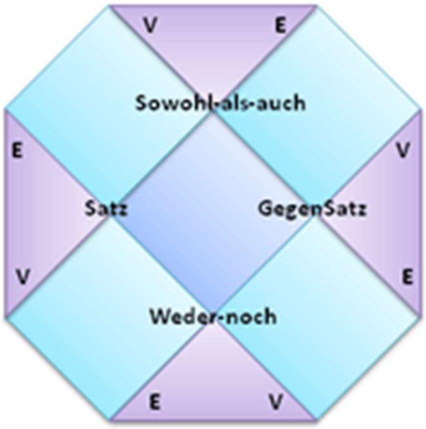
4. Jede 3-adische semiotische Relation

$R^3 = (3.x, 2.y, 1.z)$

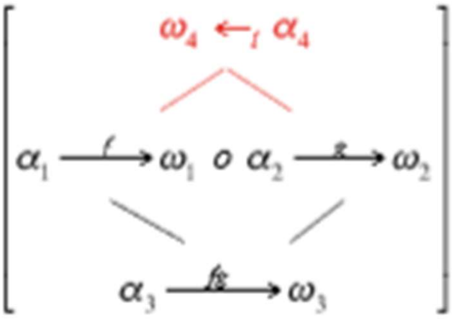
kann nach einem Vorschlag von Walther (1979, S. 79) als Konkatenation zweier 2-adischer Relationen

$R_1^2 = (3.x, 2.y)$, $R_2^2 = (2.y, 1.z)$

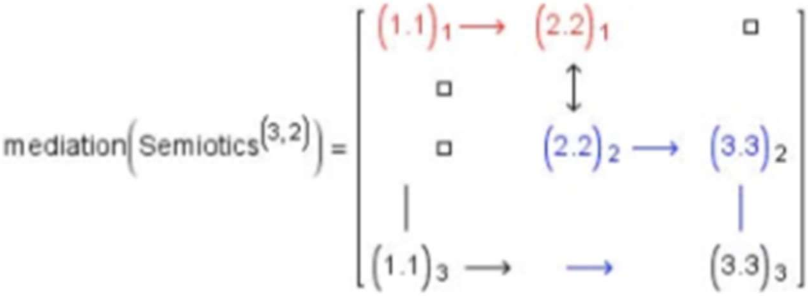
dargestellt werden. Die weitere 2-adische Relation (3.x, 1.z) entspricht somit der logischen Akzeption («Synthese») eines dialektischen semiotischen Schemas, zu dem man durch Hinzunahme der Rejektion das sog. Tetralemma erhält



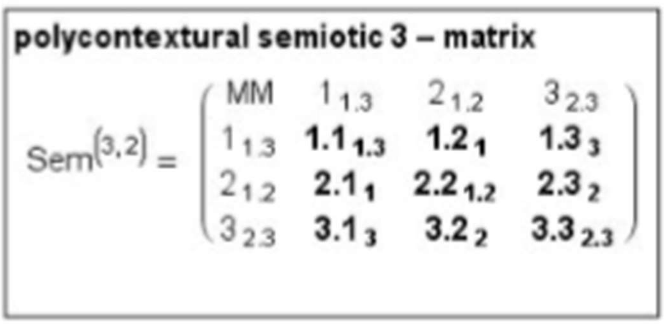
Jedes R läßt sich damit in der Form eines Tetralemmas oder, wie Kaehr (2007) sich ausgedrückt hatte, in der Form eines Diamanten (diamond) darstellen, dessen Relata kontexturiert werden können.



Die Kontexturierung basiert dabei, wie Kaehr (2009, S. 192) dargestellt hatte, auf der Dekomposition der semiotischen Matrix

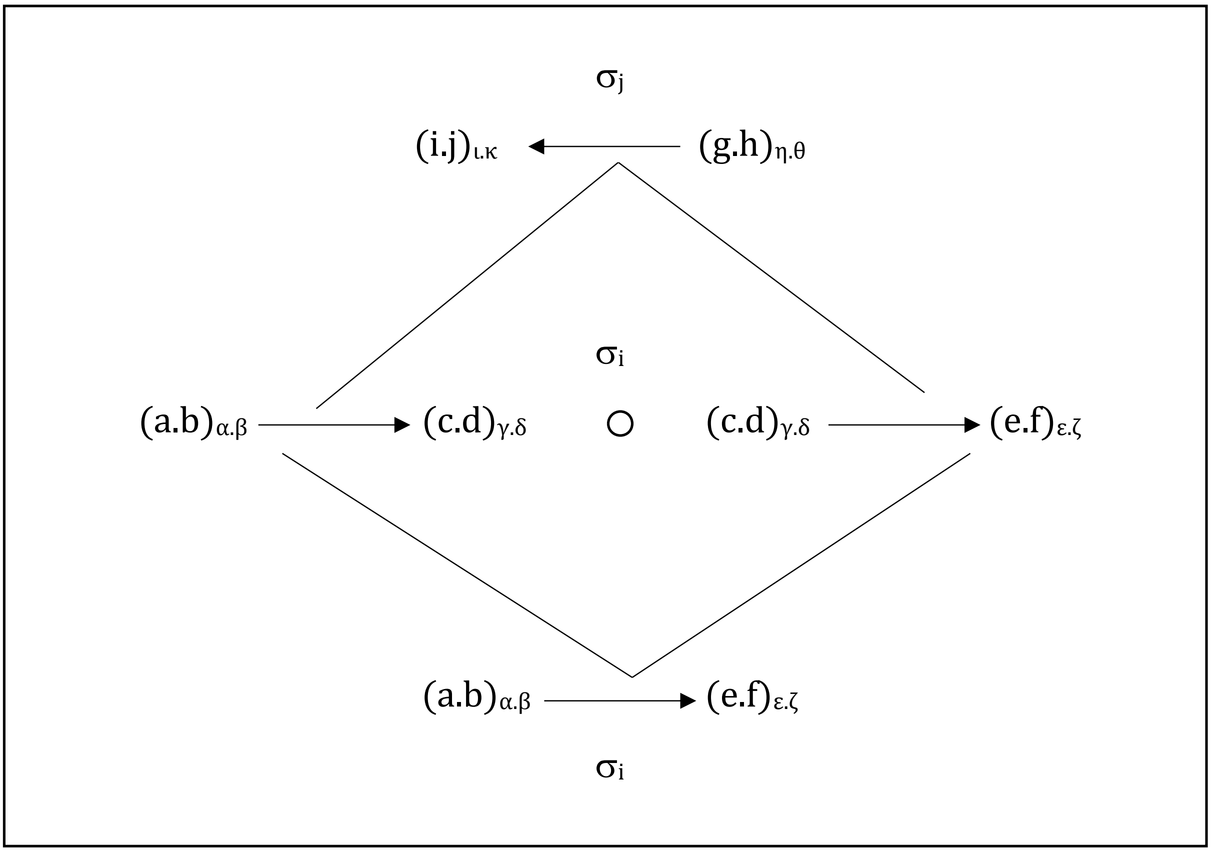


und man erhält somit



	MM	$1_{1.3}$	$2_{1.2}$	$3_{2.3}$
$Sem^{(3,2)} =$	$1_{1.3}$	$\mathbf{1.1}_{1.3}$	$\mathbf{1.2}_{1}$	$\mathbf{1.3}_{3}$
	$2_{1.2}$	$\mathbf{2.1}_{1}$	$\mathbf{2.2}_{1.2}$	$\mathbf{2.3}_{2}$
	$3_{2.3}$	$\mathbf{3.1}_{3}$	$\mathbf{3.2}_{2}$	$\mathbf{3.3}_{2.3}$

Das allgemeine Schema eines gruppentheoretischen semiotischen Diamanten sieht somit wie folgt aus:



mit

a, ..., j ∈ (1, 2, 3)	Peircezahlen (P)
α, ..., κ ∈ (1, 2, 3)	Kontexturenzahlen (K)
i, j ∈ (1, 2, 3)	Gruppenzahlen (G)

P, K, G sind also die drei Arten von Zahlen, mit welchen gruppentheoretische semiotische Relationen vollständig beschreibbar sind. Offenbar gilt

$|P| = |K|$.

Als Beispiel setzen wir

(a.b) = (3.1)

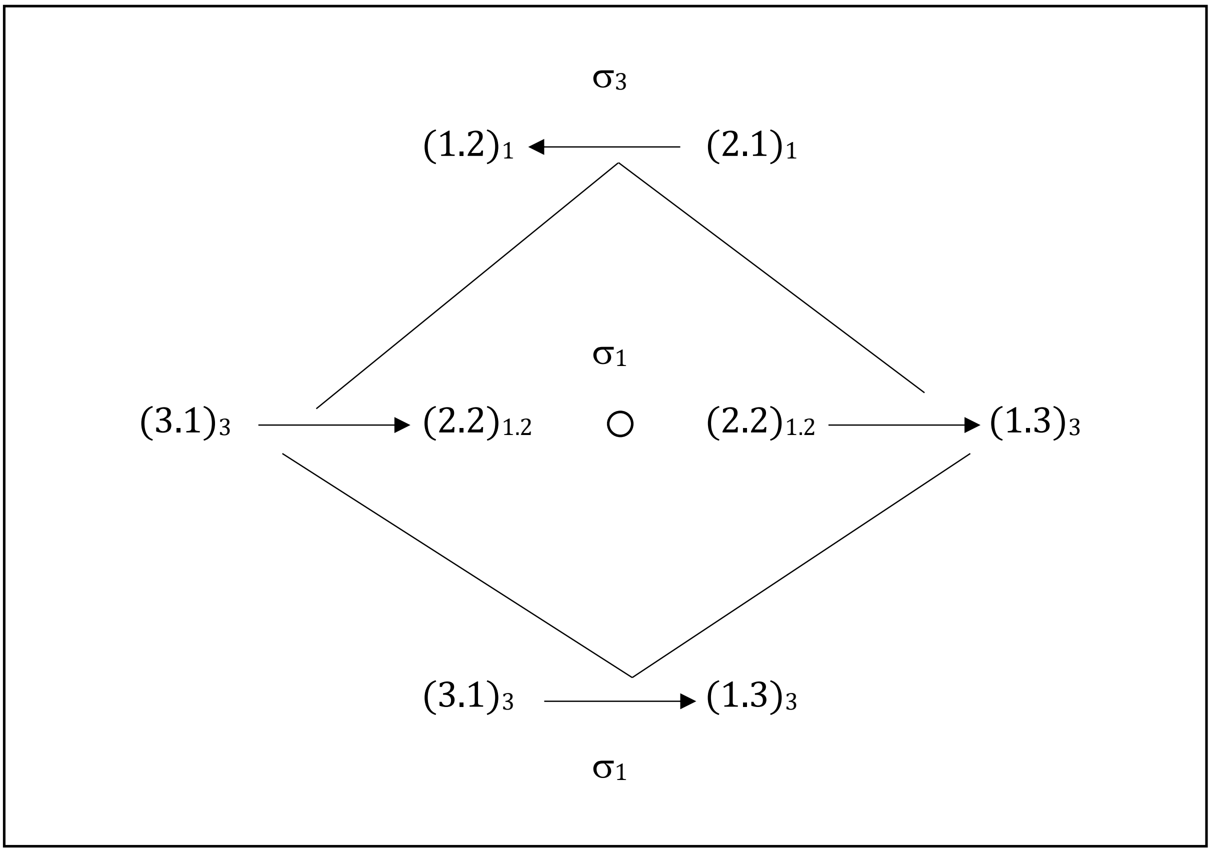
(c.d) = (2.2)

(e.f) = (1.3),

ferner

$\sigma_i = 1, \sigma_j = 3$.

Dann erhalten wir in bijektiver Abbildung folgenden Diamanten.



Literatur

Bogarin, Jorge, Symplerosis. Über komplementäre Zeichen und Realitäten. In: Semiosis 65-68, 1992, S. 87-94

Kaehr, Rudolf, The Book of Diamonds. Glasgow 2007. Digitalisat: www.vordenker.de/rk/rk_Diamond-Theory_collection-of-papers-and-fragments_2007.pdf

Kaehr, Rudolf, Diamond-Semiotic Short Studies. Glasgow 2009. Digitalisat: www.vordenker.de/rk/rk_Diamond-Semiotic_Short-Studies_2009.pdf

Toth, Alfred Gruppentheoretische Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2009

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

6.5.2020